Большая перемена

Э.Н. Балаян

НАУЧИСЬ РЕШАТЬ УРАВНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Прокачай свои мозги!

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Ростов-на-Дону
Феникс
2022

УДК 373.161.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Научись решать уравнения различными способами. Прокачай свои мозги! Профильный уровень / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2022. — 206, [1] с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-36196-2

Предлагаемое пособие посвящено решению уравнений различными способами.

Представлен разнообразный материал профильного уровня, куда входят все основные методы и идеи решения уравнений, изучаемых в основной и старшей школе: целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических и показательных.

На многочисленных примерах с подробными решениями и обоснованиями показаны различные способы решения уравнений и систем уравнений.

В заключительной части книги приводятся нестандартные уравнения с применением оригинальных идей решения.

Пособие предназначено выпускникам средней школы с хорошей математической подготовкой, учителям математики, методистам и репетиторам, а также для проведения олимпиад различного уровня, подготовки к ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-36196-2 ББК 22.1я721

ПРЕДИСЛОВИЕ

В педагогической и методической литературе сложилось устойчивое мнение, что решение задач разными способами является наиболее эффективным педагогическим приемом, который способствует повышению уровня математических знаний и умений учащихся, пробуждает у них творческую фантазию и интерес к изучению математики.

Следует отметить, что если данный прием применять бессистемно, решая при возможности задачи разными способами, то в итоге можно получить обратный результат — потерю интереса к предмету, бесполезную трату времени. Прежде чем предложить учащимся какую-либо задачу, учитель должен детально разобраться в ней сам: найти различные способы решения, установить возможные связи с другими задачами.

Можно отметить основные цели решения одной задачи разными способами или методами:

1. Выявление межпредметных связей: алгебра — геометрия, тригонометрия — геометрия и др.

2. Выявление сущности конкретных методов и отличительных черт, преимуществ и недостатков при применении к конкретным типам задач.

3. Обобщение и систематизация полученных знаний, установление взаимосвязей между различными теоретическими фактами.

4. Показ рациональности, эффективности одних и нерациональности и ошибочности других способов.

Решение задач разными способами позволяет охватить большой объем теоретического материала, установить связи между изучаемыми понятиями и фактами.

Когда разные методы использованы на одной задаче, у учащихся появляется возможность сравнить, оценить и проанализировать их особенности.

Надо отметить, что литература на подобную тему выходила в последний раз более 50 лет назад.

Как отмечал ректор МГУ В. Садовничий, «уровень школьной подготовки становится ниже, прежде всего по математике, физике и химии, и это большая проблема. Надо это остановить».

Появление настоящей книги — попытка в какой-то мере устранить этот пробел, помочь, прежде всего школьникам и молодым учителям, повысить уровень и качество знаний, а также ознакомиться с различными приемами и идеями, применяемыми при решении уравнений.

Заметим, что решение одной задачи несколькими способами (даже без оценки их с точки зрения рациональности) имеет бо́льшее значение для математического развития учащихся, чем решение многих задач, но одним и тем же способом.

Книга состоит из 5 параграфов, 4 из которых снабжены краткими теоретическими сведениями и справочными материалами. Первые четыре параграфа содержат достаточное количество примеров с решениями и примеров для самостоятельного решения, помещенных в конце параграфов. Для удобства пользования и контроля знаний приводятся ответы на все задания для самостоятельного решения.

Пятый параграф содержит нестандартные уравнения повышенной степени сложности, но методы их решения ни в какой мере не выходят за рамки программы для поступающих в вузы.

Книга может быть использована в работе подготовительных отделений вузов, а также для занятий с репетиторами.

Кроме того, наличие большого количества разноуровневых примеров дает возможность учителям использовать книгу в работе математических кружков и для подготовки к олимпиадам различных уровней, что особенно актуально в настоящее время.

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краткая теория и справочные материалы

Основные формулы алгебры

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -b/a$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Если $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, действительных корней нет.

Частные случаи:

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$, если a и c имеют разные знаки; если a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$;
в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$x^2 + px + q = 0$, $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$.

3) Квадратное уравнение вида

$$ax^2 + 2kx + c = 0,\ x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

3. Теорема Виета

а) для квадратного уравнения общего вида:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного вида:
$x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

4. Разложение квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.
Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

5. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.
Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному виду

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

6. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду $a\left(x^2 + \dfrac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{m}{x}\right) + c = 0$

и заменой $y = x + \dfrac{m}{x}$ и $y^2 - 2m = x^2 + \dfrac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи:

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $m = 1$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \dfrac{1}{x}$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $m = -1$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \dfrac{1}{x}$.

7. Свойства степеней

Для любых действительных x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$;
$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

8. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$
$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) =$
$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;
$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$;
$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$
$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) =$
$= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;
$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b + b^4)$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решить уравнение

$$(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2).$$

Решение.

I способ

Запишем уравнение в виде

$(x^4 + 4x^3 + 4x^2) - 2x^2 - 4x + 1 = 0$, или

$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) \cdot 1 + 1 = 0.$

Как видим, левая часть уравнения представляет собой квадрат разности:

$(x^2 + 2x - 1)^2 = 0$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$,

откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

II способ

Из условия следует, что $x \neq 0$, тогда имеем

$1 + 2x^2 + x^4 = 4x - 4x^3$, или

$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$

Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$:

$x^2 + 4x + 2 - 4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, или

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = y^2 + 2.$

Получим уравнение $y^2 + 2 + 4y + 2 = 0$, или

$y^2 + 4y + 4 = 0$, или $(y + 2)^2 = 0$, откуда $y = -2$.

Учитывая замену $x - \frac{1}{x} = y$, получим $x - \frac{1}{x} = -2$, или

$x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда находим $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

III способ

Вычтем из обеих частей уравнения $4x^2$:
$(1 + x^2)^2 - 4x^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$1 - 2x^2 + x^4 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$, или
$(1 - x^2)^2 = 4x(1 - x^2) - 4x^2$.

Разделим обе части полученного уравнения на $x(1 - x^2) \neq 0$. Имеем $\frac{1-x^2}{x} = 4 - 4\cdot\frac{x}{1-x^2}$.

Пусть $\frac{1-x^2}{x} = t$, тогда $\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{t}$, значит, $t = 4 - \frac{4}{t}$, или $t^2 - 4t + 4 = 0$, $(t - 2)^2 = 0$, откуда $t = 2$, и т. д. (см. I способ).

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

IV способ

$(1 + x^2)^2 = 4x(1 - x^2)$.

Поскольку $(1 + x^2)^2 > 0$ при всех $x \in R$, то $x(1 - x^2) > 0$, или $x(x - 1)(x + 1) < 0$, откуда, решая методом интервалов, находим $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Пусть $x = \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда получим уравнение относительно переменной $\operatorname{tg} t$:

$(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 = 4\operatorname{tg} t \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 t)$.

Но $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, тогда имеем

$$\frac{1}{\cos^4 t} = \frac{4\sin t}{\cos t}\cdot\frac{\cos^2 t - \operatorname{sun}^2 t}{\cos^2 t}.$$

Но $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$, следовательно,

$\frac{1}{\cos t} = 4\sin t\cos 2t$, или $4 \sin t \cos t \cos 2t = 1$.

Поскольку $2\sin t\cos t = \sin 2t$, то получим $2\sin 2t\cos 2t = 1$, или $\sin 4t = 1$, откуда $4t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$t = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Так как $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < \frac{\pi}{2}$,

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} < \frac{n}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$, или $-1 - \frac{1}{4} < n < 1 - \frac{1}{4}$, или $-1{,}25 < n < 0{,}75$, откуда $n = -1$, $n = 0$.

Если $n = -1$, то $t = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$.

Если $n = 0$, то $t = \frac{\pi}{8}$.

Учитывая, что $x = \operatorname{tg} t$, находим $x_1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, тогда $x_1 = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} =$

$$= -\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = -1-\sqrt{2}.$$

Аналогично $x_2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} =$

$= -1+\sqrt{2}.$

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}.$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - x + 1 = 4x^2.$$

Решение.

I способ

Запишем уравнение в виде

$(x^4 - 2x^2 + 1) + (x^3 - x) - 2x^2 = 0$, или

$(x^2 - 1)^2 + x(x^2 - 1) - 2x^2 = 0.$

Пусть $x^2 - 1 = y$, тогда получим $y^2 + yx - 2x^2 = 0$ — однородное уравнение II степени.

Полученное уравнение можно решить разными способами:

1) разделить обе части на x^2 (или y^2);

2) разложить левую часть на множители способом группировки, представив $yx = 2xy - xy$;

3) как квадратное относительно переменной y, считая $x = \text{const}$.

Имеем $y_1 = -2x$, $y_2 = x$.

Учитывая замену $x^2 - 1 = y$, получим

а) $\begin{cases} x^2 - 1 = y, \\ y = -2x; \end{cases}$ $x^2 - 1 = -2x$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$, откуда $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$;

б) $\begin{cases} x^2 - 1 = y, \\ y = x; \end{cases}$ $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$

Следовательно, исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}$; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

II способ

Запишем уравнение в виде
$x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 2x^2$.

Прибавим к обеим частям уравнения по $\frac{1}{4}x^2$:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 1 = \frac{9}{4}x^2.$$

Теперь видим, что левая часть уравнения — квадрат разности $x^2 + \frac{1}{2}x$ и 1.

Тогда $\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)^2 = \frac{9}{4}x^2$, откуда получим 2 уравнения:

1) $x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = \frac{3}{2}x$, или $x^2 - x - 1 = 0$, откуда

$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$;

2) $x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{3}{2}x$, $x^2 + 2x - 1 = 0$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}); -1 \pm \sqrt{2}$.

III способ

Так как $x \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим $x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$, или

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 4.$$

Далее заменой $x - \frac{1}{x} = y$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$ уравнение приводится к виду $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$, тогда получим 2 уравнения:

1) $x - \frac{1}{x} = -2$, или $x^2 + 2x - 1 = 0$;

2) $x - \frac{1}{x} = 1$, или $x^2 - x - 1 = 0$, и т. д. (см. II способ).

Ответ: $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}); -1 \pm \sqrt{2}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$4x^4 - 27x^2 + 3x + 5 = 0.$$

Решение.

I способ

Испытывая делители свободного члена, можно убедиться в том, что уравнение не имеет целых корней.

Запишем уравнение в виде

$$4x^4 - 25x^2 = 2x^2 - 3x - 5. \qquad (1)$$

Но $4x^4 - 25x^2 = x^2(2x - 5)(2x + 5)$ и $2x^2 - 3x - 5 = (2x - 5)(x + 1)$, где $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$ — корни квадратного трехчлена.

Тогда уравнение (1) примет вид

$x^2(2x - 5)(2x + 5) = (2x - 5)(x + 1)$, или

$(2x - 5)(2x^3 + 5x^2 - x - 1) = 0$, откуда

$2x - 5 = 0$, или $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$.

Значит, $x_1 = \frac{5}{2}$.

Уравнение $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$ представим в виде $2x^3 + 6x^2 + 2x - x^2 - 3x - 1 = 0$, или $2x(x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 3x + 1) = 0$, или

ОТВЕТЫ

§1. Рациональные уравнения

1. $-\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$. **2.** -4; -2. **3.** $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{53})$. **4.** 1; 2; $\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\sqrt{5}\pm1\right)$. **5.** 2; 9. **6.** ±1; 3; 5. **7.** 0; 3; $\pm1{,}5$. **8.** 1; 3; $3\pm\sqrt{2}$. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** -4; 2. **11.** $\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{7})$; $\frac{1}{3}(-12\pm5\sqrt{6})$. **12.** -3; -2. **13.** $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$. **14.** -1. **15.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{2}$. **16.** $\varnothing$. **17.** 1; 12. **18.** 1; 6; $3\pm\sqrt{2}$. **19.** -2, $1\pm\sqrt{3}$. **20.** -6; -4; $\frac{1}{2}(-15\pm\sqrt{129})$. **21.** -3; -1; $5\pm\sqrt{29}$. **22.** 3; 14. **23.** -1. **24.** -1; 5; $\frac{1}{13}(26\pm2\sqrt{39})$. **25.** $\frac{2}{1-\sqrt[3]{2}}$. **26.** 0,4; 1. **27.** $-0{,}5$. **28.** -4; 2. **29.** 5. **30.** $3\pm\sqrt{39}$; $5\pm\sqrt{55}$. **31.** 2; $-1\pm\sqrt{3}$. **32.** $\frac{1}{2}$; 2. **33.** 0. **34.** $-2{,}5$; 5. **35.** $-1{,}5$; -1; 3; 4,5. **36.** $2\pm\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})$. **37.** $-\frac{2}{3}$; 0; 3. **38.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt{3}$. **39.** -4; 2. **40.** 2; 4.

§2. Системы нелинейных уравнений

1. (0; 0); (1; 2); $\left(\frac{44}{23};\frac{4}{23}\right)$. **2.** (2; 2); $\left(-\frac{19}{5};-\frac{8}{25}\right)$; $\left(\frac{25}{7};-\frac{8}{7}\right)$. **3.** (3; -2). **4.** (-1; 2); (2; -1). **5.** (3; 3); $\left(-\frac{3}{7};\frac{75}{13}\right)$. **6.** ($\pm3$; ±2); (±2; ±3). **7.** $\left(-\frac{3}{2};-4\right)$; (2; 3). **8.** $\left(-\frac{26}{5};-\frac{13}{5}\right)$; (0; 0); (2; 3). **9.** (±3; ±5); $\left(\pm\frac{5}{3};\pm\frac{13}{3}\right)$. **10.** ($\pm1$; ±2); (±2; ±1). **11.** (3; 1); (-1; -3); ($\sqrt[3]{13}$, $-\sqrt[3]{13}$). **12.** (±3; ±2); (±2; ±3). **13.** (-1; -2); (0, 0); (2; 1). **14.** (0; 1,5); (3; 0). **15.** (4; 1); (1; 4). **16.** (2; 1); (1; 2).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

0+

Балаян Эдуард Николаевич

НАУЧИСЬ РЕШАТЬ УРАВНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Прокачай свои мозги!

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Ответственный редактор *С. Осташов*

Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип. №2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,1. Тираж 2500 экз.
Заказ №

Импортер на территории ЕАЭС: ООО «Феникс»

344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59

Изготовлено в Украине. Дата изготовления: 10.2021.

Срок годности не ограничен.

Изготовитель: ООО «БЭТ».
61024, Украина, г. Харьков, ул. Максимилиановская, 17