Серия «Большая перемена»

Марина Евтушенко
Владимир Мишин

ГЕОМЕТРИЯ
Типовые задачи с краткими ответами

1800 задач по планиметрии

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2022

УДК 373.167.1:514
ББК 22.15я72
КТК 445
Е 27

Евтушенко М.
Е27 Геометрия. Типовые задачи с краткими ответами: 1800 задач по планиметрии / Марина Евтушенко, Владимир Мишин. — Ростов н/Д : Феникс, 2022. — 269 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-36380-5

Данный сборник поможет подготовиться к решению задач по планиметрии (раздел геометрии) на ОГЭ и ЕГЭ по математике. В нем содержатся более 1800 задач, соответствующих сертификации ОГЭ и ЕГЭ, и необходимый минимум теоретических сведений. Все задания разбиты на блоки (треугольники, четырехугольники, окружности и векторы); дано подробное решение одного задания, остальные представлены для самостоятельных занятий. Сборник содержит также тренажер по отработке решения задач на клетчатой бумаге и координатной плоскости. Материалы сборника соответствуют требованиям Федерального института педагогических измерений и могут быть использованы для самостоятельной подготовки к экзаменам. Пособие предназначено для учащихся, репетиторов и учителей общеобразовательных учреждений.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.15я72

ISBN 978-5-222-36380-5

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТРЕУГОЛЬНИКИ

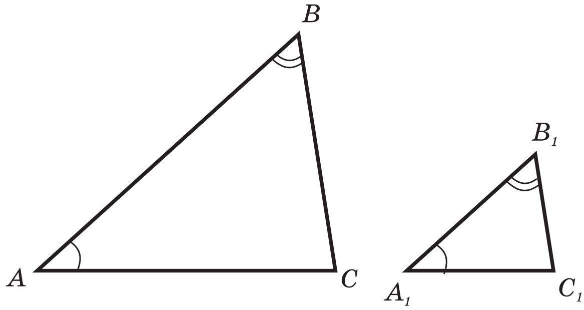
- Сумма углов треугольника равна $180°$.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.
- Каждая из сторон треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Признаки равенства треугольников

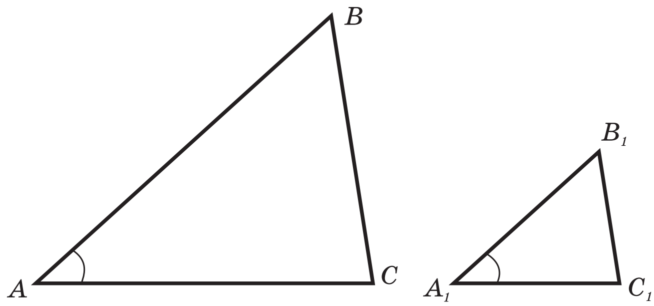
- Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признаки подобия треугольников

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

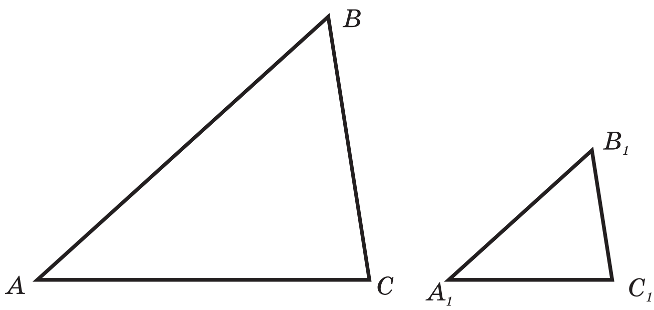


- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



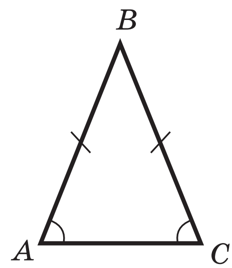
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

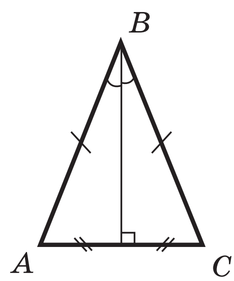


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

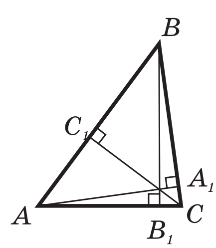
- Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.
- Если высоты треугольников равны, то их площади относятся как основания.
- Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.
- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



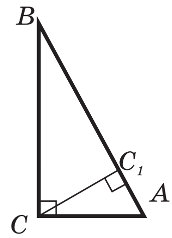
- В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.



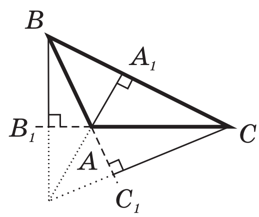
- Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.
- В равностороннем треугольнике все углы равны.
- Высота равностороннего треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона треугольника.
- Высоты остроугольного треугольника пересекаются в точке, лежащей во внутренней области треугольника.



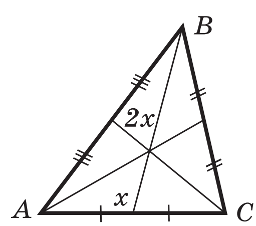
- Высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла.



- Высоты или их продолжения тупоугольного треугольника пересекаются в точке, лежащей во внешней области треугольника.

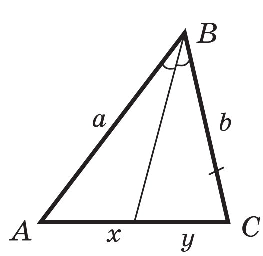


- Все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

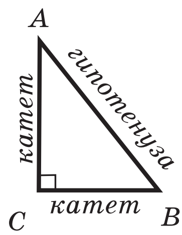


- Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон

т. е. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$.



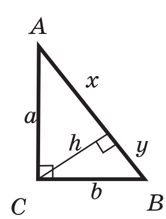
- Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.



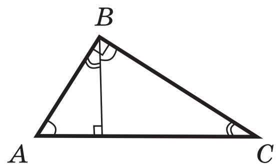
- В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы.
- Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы и является радиусом описанной окружности.
- Если прямоугольный треугольник является равнобедренным, то его острые углы равны $45°$.
- В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза $c = a\sqrt{2}$.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
- Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
- Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
- Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.
- Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое (среднее пропорциональное) между проекциями катетов на гипотенузу,
  т. е. $h = \sqrt{x \times y}$.

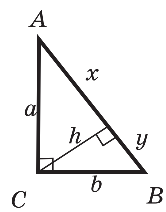


- Высота в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, делит его на два подобных треугольника. Кроме того, каждый из этих треугольников подобен исходному.



- Катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое (среднее пропорциональное) между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу,

  т. е. $a = \sqrt{x(x+y)}$, $b = \sqrt{y(x+y)}$.



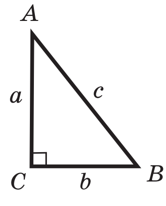
Признаки подобия прямоугольных треугольников

- Если прямоугольные треугольники имеют равный острый угол, то такие треугольники подобны.
- Если два катета одного прямоугольного треугольника пропорциональны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.
- Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.

Теорема Пифагора

- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов,

  т. е. $c^2 = a^2 + b^2$.

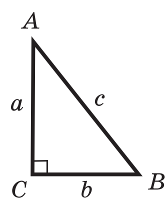


Обратная теорема Пифагора

- Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный.

Соотношения в прямоугольном треугольнике

- Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отншение противолежащего катета к прилежащему катету.
- Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.



$$\sin A = \cos B,\ \sin B = \cos A,$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B,\ \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$$

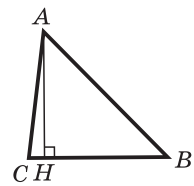
Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Таблица тригонометрических значений

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
sin *a*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	1	0	−1	0
cos *a*	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg *a*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg *a*	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Площади треугольников



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin A = \frac{1}{2} \times AC \times CB \times \sin C = \frac{1}{2} \times CB \times AB \times \sin B$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \times r,$$

где P_{ABC} — периметр треугольника, а r — радиус вписанной окружности.

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а R — радиус описанной окружности.

Формула Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

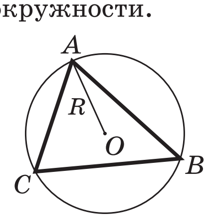
Площадь равностороннего треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов,

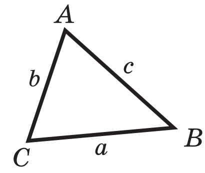
т. е. $$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.



Теорема косинусов

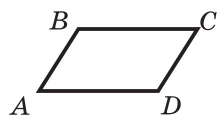
- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т. е. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.



ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Свойства параллелограмма

- Противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны.
- Противоположные углы параллелограмма равны.
- Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
- Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.
- Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.



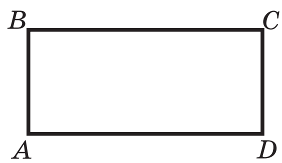
Признаки параллелограмма

- Если диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если две стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

ПРЯМОУГОЛЬНИК

Свойства прямоугольника

- Противолежащие стороны прямоугольника равны.
- Диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Диагонали прямоугольника равны.
- Биссектриса угла прямоугольника отсекает от него равнобедренный прямоугольный треугольник.



Признаки прямоугольника

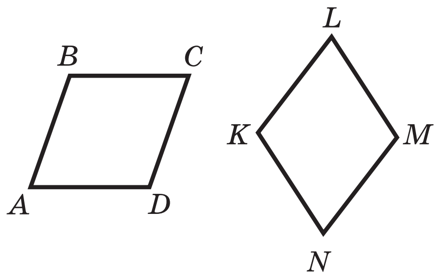
- Если в параллелограмме все углы равны, то он является прямоугольником.
- Если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.
- Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником.
- Если у четырехугольника три угла прямые, то он является прямоугольником.
- Если около параллелограмма можно описать окружность, то он является прямоугольником.
- Если в параллелограмме квадрат диагонали равен сумме квадратов смежных сторон, то он является прямоугольником.

РОМБ

Свойства ромба

- Стороны ромба равны.
- Противолежащие углы ромба равны.
- Сумма углов, прилежащих к одной стороне ромба, равна.
- Диагонали ромба пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
- Сумма квадратов диагоналей ромба равна сумме квадратов его сторон.

- Угол между высотами ромба, проведенными из вершины тупого угла, равен острому углу ромба.



Признаки ромба

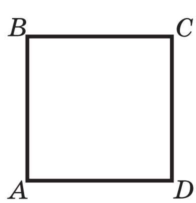
- Если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.
- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.
- Если у четырехугольника все стороны равны, то он является ромбом.
- Если смежные стороны параллелограмма равны, то он является ромбом.

КВАДРАТ

Свойства квадрата

- Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба.

  Диагональ квадрата $d = a\sqrt{2}$, a — где сторона квадрата.

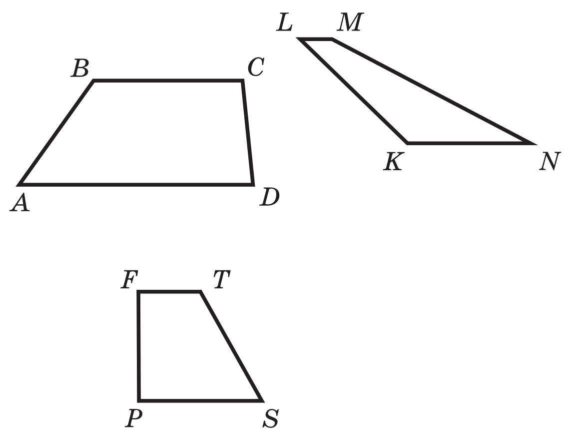


ТРАПЕЦИЯ

Свойства трапеции

- Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
- Сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180°.

- Диагонали равнобедренной трапеции равны.
- Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.
- Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.
- Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований и лежит на средней линии трапеции.



Признаки трапеции

- Если углы при основании трапеции равны, то она — равнобедренная.
- Если сумма противолежащих углов трапеции равна 180°, то она — равнобедренная.
- Если диагонали трапеции равны, то она — равнобедренная.
- Если около трапеции можно описать окружность, то она — равнобедренная.

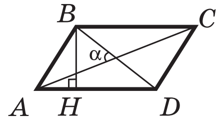
ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Площадь квадрата

$S_{ABCD} = a^2$, где a — сторона квадрата.

Площадь параллелограмма

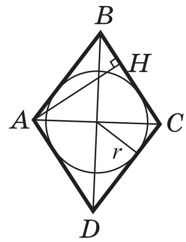
$$S_{ABCD} = BH \times AD, \ S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A, \ S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\alpha.$$



Площадь ромба

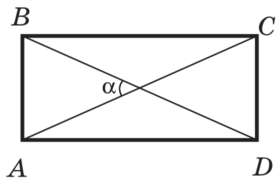
$$S_{ABCD} = AH \times BC,\ S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A,\ \ S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD,$$

$S_{ABCD} = p \times r$, где $p = \dfrac{AB + BC + CD + AD}{2}$, r — радиус вписанной окружности.



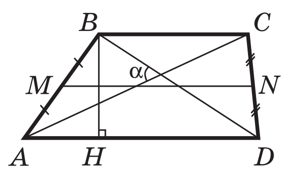
Площадь прямоугольника

$$S_{ABCD} = AB \times BC,\ \ S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 \times \sin\alpha.$$



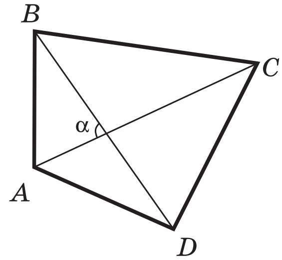
Площадь трапеции

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \times BH,\ \ S_{ABCD} = MN \times BH, = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin\alpha.$$

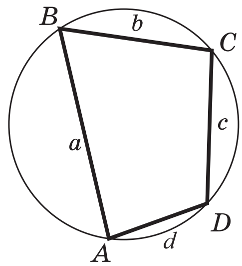


Площадь произвольного четырехугольника

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin\alpha.$$



- Если четырехугольник можно вписать в окружность, то $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$, a, b, c, d стороны четырехугольника.



Формула Пика

Позволяет вычислить площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки.

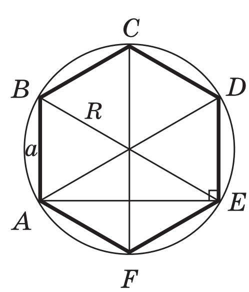
$S = B + \dfrac{\Gamma}{2} - 1$, где В — количество узлов внутри многоугольника, Г — количество узлов на границе многоугольника.

ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

- Радиус вписанного в окружность правильного шестиугольника равен его стороне.
- Диагональ «через две вершины» параллельна стороне правильного шестиугольника и равна $2a$, где a — сторона шестиугольника.
- Диагональ «через одну вершину» перпендикулярна одной из сторон правильного шестиугольника и равна $a\sqrt{3}$, где a — сторона.

$S_{ABCDEF} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, где a — сторона шестиугольника.

$S_{ABCDEF} = 2\sqrt{3}r^2$, где r — радиус вписанной окружности.

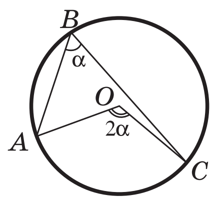


ОКРУЖНОСТЬ

- В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.
- Центр вписанной в треугольник окружности — точка пересечения его биссектрис.
- Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.
- Центр описанной около треугольника окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности — середина гипотенузы.
- В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.
- Около любого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны.
- В любой квадрат можно вписать окружность и притом только одну.
- Около любого квадрата можно описать окружность и притом только одну.
- Около любого прямоугольника можно описать окружность и притом только одну.
- В любой ромб можно вписать окружность и притом только одну.
- Если около трапеции можно описать окружность, то она — равнобедренная.
- В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.
- Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и притом только одну.

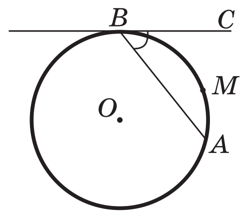
Центральные и вписанные углы

- Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.
- Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
- Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.



- Угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец хорды, равен половине дуги, лежащей внутри этого угла,

  т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BMA$.

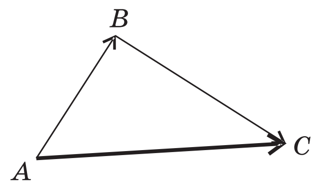


ВЕКТОРЫ

Сложение векторов

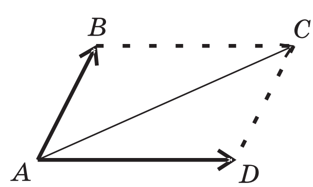
- Правило треугольника

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



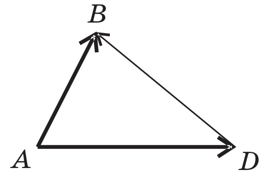
- Правило параллелограмма

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \text{ где } ABCD \text{ — параллелограмм.}$$

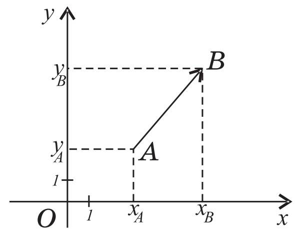


Вычитание векторов

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$



- Координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x;y)$ находятся по формулам $\begin{cases} x = x_B - x_A \\ y = y_B - y_A \end{cases}$, где $(x_A;\ y_A),(x_B;\ y_B)$ — координаты его начала и конца соответственно.



Длина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}: \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $(x; y)$ — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

- Скалярное произведение векторов

1. $\vec{a} \times \vec{b} = x_a \times x_b + y_a \times y_b$, где $(x_a;\ y_a),(x_b;\ y_b)$ — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos(\vec{a}\vec{b})$.

ЗАДАЧИ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 7 и 6, а угол между ними равен $30°$.

2. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны $8\sqrt{2}$ и 4, а угол между ними равен $45°$.

3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 18 и 12, а угол между ними равен $150°$.

4. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны $10\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен $60°$.

---

5. В треугольнике со сторонами 12 и 15 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 8. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

6. В треугольнике со сторонами 7 и 8 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 6. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

7. В треугольнике со сторонами 6 и 8 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 6. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

8. В треугольнике со сторонами 9 и 4 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 8. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?

---

9. Площадь треугольника ABC равна 8, DE — средняя линия. Найдите площадь треугольника CDE.

10. Площадь треугольника TNK равна 5, AB — средняя линия. Найдите площадь треугольника ABK.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Евтушенко Марина
Мишин Владимир

ГЕОМЕТРИЯ. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ С КРАТКИМИ ОТВЕТАМИ

1800 задач по планиметрии

Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Зак. №

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 09.2021.
Срок годности не ограничен.

Отпечатано в ООО «БПК-Групп»
Юр. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б, каб. 106.
Факт. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б.