

Серия
«ЕГЭ. Высший балл»

Анна Малкова

МАТЕМАТИКА. УМНЫЙ СБОРНИК ЗАДАЧ

Ростов-на-Дону
ФЕНИКС
2023

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
М19

Малкова А. Г.

М19 Математика. Умный сборник задач / Анна Малкова. — Ростов н/Д : Феникс, 2023. — 363, [2] с. : ил. — (ЕГЭ. Высший балл).

ISBN 978-5-222-36786-5

Эта книга для вас, старшеклассники и учителя. Она поможет вам подготовиться к ЕГЭ по математике.

В ней собрано более 400 авторских задач с подробными решениями и ответами. Среди них есть веселые задачи. Есть хитрые, с неожиданными решениями, когда ответ не такой, как может показаться на первый взгляд. И главное — есть объяснение на примерах всех тем ЕГЭ по математике. Включая новые, которые появятся на экзамене в этом году.

Для того чтобы решать задачи ЕГЭ, надо отлично знать теорию. Но что делать, если вы что-то забыли? Вам помогут QR-коды на страницах книги. Перейдя по ним, вы сможете повторить теоремы и формулы, узнать больше о приемах решения задач и посмотреть учебное видео.

Если вы учитель или репетитор — вы найдете здесь подборки заданий для контрольных и Пробных ЕГЭ, с решениями и ответами. Задания составлены так, чтобы отработать наиболее сложные темы ЕГЭ по математике и предупредить о распространенных ошибках на экзамене.

Автор большей части задач сборника — Анна Малкова. Преподаватель математики с опытом более 25 лет, готовящая старшеклассников к ЕГЭ с момента его появления. Анна Малкова ведет онлайн-курс подготовки к ЕГЭ и канал на YouTube, записывает видеокурсы, пишет книги по математике — в общем, помогает старшеклассникам сдать ЕГЭ на 90+ баллов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-222-36786-5

© Малкова А. Г., 2022
© Оформление: ООО «Феникс», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Как работать с Умным сборником задач	4
Глава 1. Топ-10 основных ошибок на ЕГЭ по Профильной математике. Задачи с кратким ответом	5
Глава 2. Простейшие текстовые задачи и тренировка внимательности	14
Глава 3. Задачи на проценты	17
Глава 4. Текстовые задачи: движение и работа, растворы и смеси	23
Глава 5. Арифметическая и геометрическая прогрессии	34
Глава 6. Теория вероятностей	40
Глава 7. Простейшие графики и диаграммы. Тренируем внимательность, вспоминаем свойства функций	61
Глава 8. Задачи с физическим и практическим содержанием	69
Глава 9. Планиметрия, часть 1 ЕГЭ по математике	76
Глава 10. Стереометрия, часть 1 ЕГЭ по математике	107
Глава 11. Преобразование выражений и применение полезных формул	118
Глава 12. Простейшие уравнения	131
Глава 13. Функции и графики. 5 типов элементарных функций. Преобразования графиков функций	142
Глава 14. Производная и первообразная	178
Глава 15. Уравнения, часть 2 ЕГЭ по математике	193
Глава 16. Неравенства, часть 2 ЕГЭ по математике	213
Глава 17. «Экономические» задачи на ЕГЭ по математике. Кредиты и вклады	231
Глава 18. Задачи на оптимизацию на ЕГЭ по математике	249
Глава 19. Стереометрия, часть 2 ЕГЭ по математике	256
Глава 20. Планиметрия, часть 2 ЕГЭ по математике	287
Глава 21. Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике	309
Глава 22. Задачи на числа и их свойства на ЕГЭ по математике	343
Бонусная глава 23. Комплексные числа	358
Короткое послесловие	365

КАК РАБОТАТЬ С УМНЫМ СБОРНИКОМ ЗАДАЧ

Приветствую вас, дорогие читатели.

Много лет в своей компании «ЕГЭ-Студия» я провожу пробные ЕГЭ и математические тренинги. Знаю, какие темы оказываются для старшеклассников наиболее сложными. Вместе с преподавателями ЕГЭ-Студии придумываю веселые и умные задачи, чтобы отработать важные темы. Так и появилась эта книга.

Как я скучала в школе на уроках математики — словами не передать! Хотелось не однообразных и примитивных задач, а красивых и забавных.

Вот такие задачи и включены в сборник. Про студентов, гномов и гоблинов. Про баржу «Анна Каренина» и глупого пингвина.

Мне нравится, когда при решении задачи нужно проявить сообразительность. Бывает, что есть долгий путь к ответу — и есть короткий. Увидишь короткий путь — получишь награду: вместо занудных вычислений — красивое решение за пять минут. Иногда задача с виду проста, но в ней спрятана ловушка. На ЕГЭ такие тоже бывают.

Задачи сборника помогут вам повторить основные темы и формулы курса математики за 10-й и 11-й класс, а также освоить методы, о которых не всегда рассказывают в школе.

К каждой из них дан не только ответ, но и подробное решение (в конце главы), указано, какие применены методы и приемы, приведены ссылки на необходимую теорию. Оформление заданий с развернутым ответом дается в соответствии с требованиями ЕГЭ по математике.

Не спешите сразу заглядывать в решения. Старайтесь справиться сами, а потом проверяйте. Записывайте решения в большой тетради в клетку. Чертежи стройте по линейке, ручкой, а сложные чертежи — цветными ручками. Задания 2-й части ЕГЭ оформляйте сразу так, как сделали бы это на экзамене. Если не хватает теоретических знаний, переходите по ссылкам и QR-кодам.

Что делать, если что-то непонятно? Скорее всего, не хватает теоретических знаний. В этой книге — только задачи. Но у меня есть для вас чудесный QR-код. Наведите на него смартфон — и увидите страницу с необходимой теорией и другими полезными материалами.



Это моя пятая книга для подготовки к ЕГЭ по математике. Все книги дополняют друг друга и помогут вам в подготовке к ЕГЭ.

Анна Малкова

Глава 1

Топ-10 основных ошибок на ЕГЭ по Профильной математике. Задачи с кратким ответом

Знаете ли вы, друзья, что 90% ошибок на ЕГЭ по математике происходит из-за обычной невнимательности?

На экзамене вы можете столкнуться с задачами, в которых особенно легко сделать ошибку. Они специально так составлены. Чтобы проверить, чему вы научились в школе.

Хотите узнать, где расставлены хитроумные ловушки для вашего разума?

Эта глава — о самых коварных, гадких и криповых задачах ЕГЭ по математике. Сколько абитуриентов, встретив их на экзамене, потеряли драгоценные баллы!

Мы выловили эти задачи среди тысяч других в Банке заданий ФИПИ, чтобы показать вам.

Вы поймете, как с ними справиться. Решайте тест и проверяйте ответы.

У вас всё получится!

10-е место. Теория вероятностей. Для независимых событий вероятность наступления и того, и другого из них равна произведению вероятностей. А что делать, если события — зависимые?

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

9-е место. Правило простое: видите в уравнении квадратный корень — будьте особенно внимательны!

Решите уравнение: $\sqrt{72 - x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

8-е место. Модули! Еще один капкан для доверчивых хомячков! Повторите на всякий случай определение модуля.

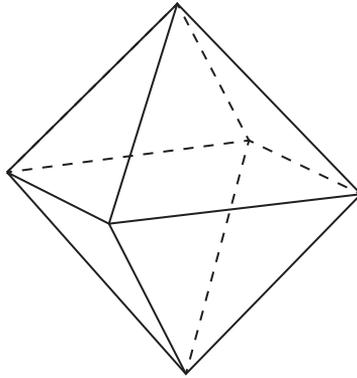
Вычислите $|x - 9| + |x - 4|$ при $5 < x < 8$.

7-е место. Простая задача, с которой справится и пятиклассник. А у вас получится?

Розничная цена учебника 180 рублей, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 10 000 рублей?

6-е место. Стереометрия.

Во сколько раз увеличится объем октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



5-е место. Знаменитая задача про рельс. Сколько абитуриентов из-за нее отправились вместо «бюджета» на «платное»!

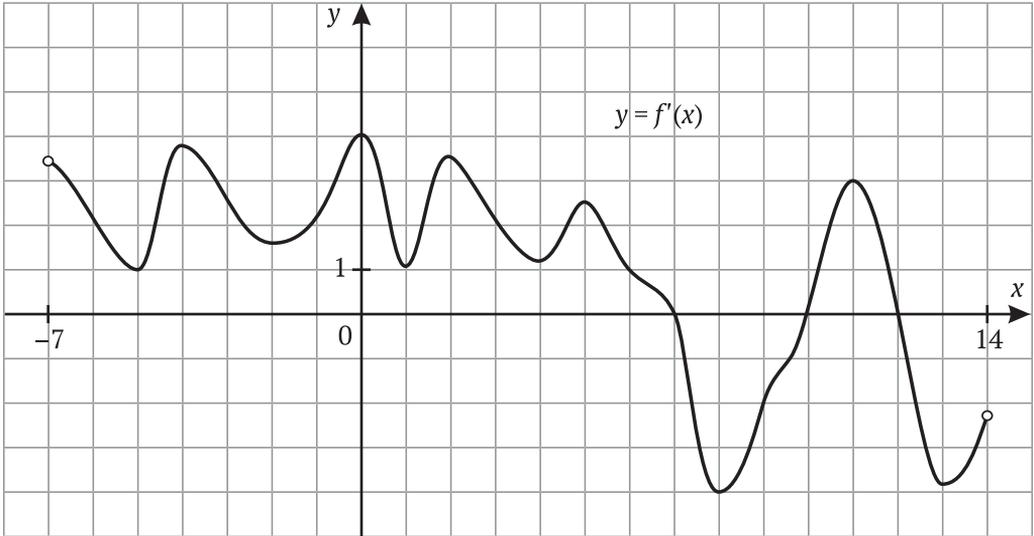
При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

4-е место. Еще одна знаменитая задача: сжечь прибор, посмотреть на пожарных!

Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

3-е место. Производная. Помним, что функция и ее производная – это не одно и то же. Внимательно читаем условие!

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



2-е место. Снова производная. Запомним: точка минимума функции и наименьшее значение функции на отрезке – это не одно и то же!

Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ на отрезке $[0,3; 3]$.

И наконец, 1-е место. Знаете ли вы, что в задании Первой части ЕГЭ по математике вам может встретиться настоящее тригонометрическое уравнение? С отбором корней. Какая коварная ловушка!

Решите уравнение: $\cos \frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решения и ответы

10-е место. Теория вероятностей.

Вероятность того, что кофе закончился, равна 0,3 и для одного, и для другого автомата.

Составим таблицу для вероятностей событий «Кофе остался» и «Кофе закончился» для каждого автомата.

	Кофе остался	Кофе закончился
Первый автомат	0,7	0,3
Второй автомат	0,7	0,3

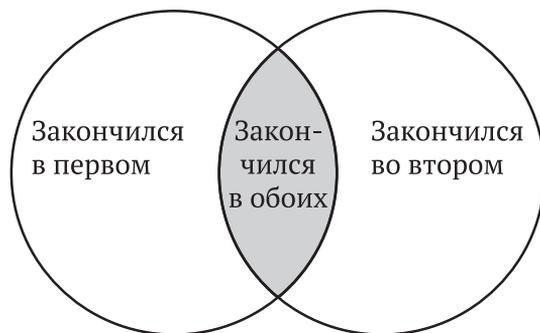
По условию задачи, вероятность того, что кофе закончился в обоих автоматах, равна 0,12. И это не $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$, как мы могли бы предположить.

Это противоречие? — Нет, все в порядке, условие корректно. Вероятность наступления двух событий сразу — «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате» — не равна произведению вероятностей. Значит, эти события зависимы.

И действительно, одно из них влияет на другое. Если в торговом центре в одном из автоматов больше нет кофе, то во втором автомате он закончится быстрее, потому что к нему пойдут все, кто хочет выпить кофе.

Кроме того, события «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате» совместны, то есть возможно наступление и того, и другого события.

Нарисуем диаграмму.



Левый круг соответствует событию «кофе закончился в 1-м автомате». Правый — «кофе закончился во 2-м автомате». Пересечение кругов соответствует событию «кофе закончился в обоих».

Найдем вероятность события «кофе закончился хотя бы в одном из автоматов» (в первом, во втором или в обоих). Вот как это сделать.

Предположим, что мы хотим посчитать площадь фигуры на рисунке. Как бы мы поступили? — Мы бы сложили площадь первого круга и площадь второго, а затем вычли площадь их пересечения, поскольку она посчитана дважды.

По тому же принципу мы считаем вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном автомате:

$$P_1 = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48.$$

Мы сложили вероятности событий «кофе закончился в 1-м автомате» и «кофе закончился во 2-м автомате». И вычли вероятность события «кофе закончился в обоих», потому что она посчитана дважды.

Чему же равна вероятность события «кофе остался в обоих автоматах»? Очевидно, что кофе может либо остаться в обоих автоматах, либо закончиться хотя бы одном. Говорят, что вместе эти события образуют полную группу событий и сумма их вероятностей равна единице.

Тогда вероятность того, что кофе останется в обоих автоматах

$$P_2 = 1 - 0,48 = 0,52.$$

Ответ: 0,52.

9-е место. Иррациональное уравнение: $\sqrt{72-x} = x$.

Правильный ответ: 8. Если ваш ответ: -9, значит, вы забыли, что такое арифметический квадратный корень.

Выражение под корнем должно быть неотрицательно. И сам корень — величина неотрицательная. Значит, и правая часть должна быть больше нуля или равна нулю. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 72-x = x^2, \\ 72-x \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Решение таких уравнений лучше всего записывать в виде цепочки равносильных переходов:

$$\sqrt{72-x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 72-x = x^2, \\ 72-x \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 72 = 0, \\ x \leq 72, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ x = -9, \\ x \leq 72, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Мы получили, что $x = 8$. Это единственный корень уравнения.

Ответ: 8.

8-е место. Модули.

Вычислим $|x-9| + |x-4|$ при $5 < x < 8$.

Вспомним определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Раскроем каждый из модулей по определению:

$$|x-9| = \begin{cases} x-9, & \text{если } x-9 \geq 0, \\ 9-x, & \text{если } x-9 < 0; \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{если } x-4 \geq 0, \\ 4-x, & \text{если } x-4 < 0. \end{cases}$$

По условию, $5 < x < 8$. Значит, $x - 9 < 0$, и первый модуль раскрывается с противоположным знаком (с «минусом»), а $x - 4 > 0$, и второй модуль раскрывается с «плюсом».

Получим: $|x - 9| + |x - 4| = 9 - x + x - 4 = 5$.

Ответ: 5.

7-е место. Задача на проценты.

Запомним: за 100% принимаем ту величину, с которой мы сравниваем. В нашем случае за 100% принимаем x — оптовую цену учебника.

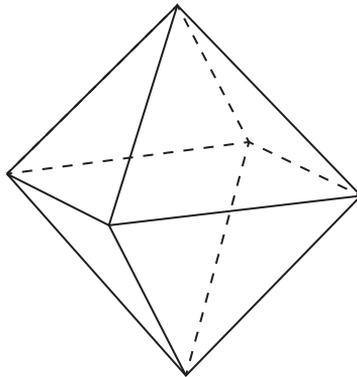
Поскольку розничная цена учебника на 20% выше оптовой, получим, что $1,2x = 180$ и $x = 150$ рублей. Здесь $1,2x$ — это розничная цена учебника. Поделим 10 000 на 150.

$$\frac{10\,000}{150} = \frac{1000}{15} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}.$$

Очевидно, округляем до меньшего.

Ответ: 66.

6-е место. Стереометрия.



Слово «октаэдр» в переводе означает «правильный восьмигранник». Он представляет собой две сложенные вместе четырехугольные пирамиды.

Мы помним, что отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия. Если все ребра многогранника увеличить в три раза, его объем увеличится в 27 раз, поскольку $3^3 = 27$.

Ответ: 27.

5-е место. Задача про рельс.

Если у вас получилось (как у 90% тех, кто решал задачу), что рельс удлинится на 3 миллиметра при температуре 7000 градусов — этого быть не может. Потому что 7000 градусов — это больше, чем температура на поверхности Солнца! Рельс расплавится.

Зависимость $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$ — это функция длины рельса от температуры. Длина рельса зависит от температуры, согласно формуле. Подставим в формулу начальные значения: $l_0 = 10$ м и $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$.

Рельс удлинился на 3 мм, то есть его длина стала на 3 мм больше. Значит, при определенной температуре длина рельса $l(t)$ стала равной $10 \text{ м} + 3 \text{ мм}$.

Переведем миллиметры в метры. Один миллиметр — это одна тысячная часть метра ($1 \text{ мм} = 0,001 \text{ м} = 10^{-3} \text{ метра}$).

$$l(t) = 10 + 3 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

Получим:

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10(1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t).$$

Это линейное уравнение с одной переменной t . Раскроем скобки в правой части:

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10 + 12 \cdot 10^{-5} \cdot t.$$

Находим t :

$$t = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = \frac{100}{4} = 25.$$

При температуре 25 градусов Цельсия рельс удлинится на 3 мм.

Ответ: 25.

4-е место. Задача про прибор.

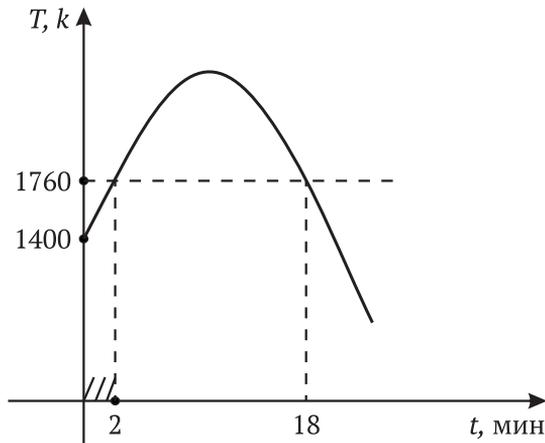
По условию, зависимость температуры нагревательного элемента от времени определяется формулой:

$$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2.$$

В нормальном режиме работы прибора должно выполняться неравенство $T \leq 1760$, или $1400 + 200t - 10t^2 \leq 1760$.

Нарисуем график зависимости температуры нагревателя от времени:

$$T(t) = 1400 + 200t - 10t^2.$$



Это квадратичная парабола с ветвями вниз.

Мы включаем прибор в момент времени $t = 0$. Температура нагревателя повышается и в момент времени t_1 достигает 1760 К. Если в этот момент прибор не выключить, температура продолжает повышаться. Но это значит, что прибор испортится, то есть сгорит!

И если вы в реальной ситуации не выключили прибор в момент t_1 и ждете момента t_2 , когда температура снова станет равна 1760 К, то дождетесь многого! А именно: заполнения помещения удушливым дымом, приезда пожарных и драматических вопросов: «Кто это сделал!?»

Ясно, что отключать прибор надо в момент времени t_1 .
Осталось найти t_1 . Решим квадратичное неравенство:

$$\begin{aligned} -t^2 + 20t - 36 &\leq 0, \\ t^2 - 20t + 36 &\geq 0, \\ (t - 2)(t - 18) &\geq 0. \end{aligned}$$

Корни соответствующего квадратного уравнения: $t_1 = 2, t_2 = 18$.

Мы нашли, что $t_1 = 2$.

Ответ: 2.

3-е место. Производная.

Внимательно читаем условие задачи. Изображен график производной, а спрашивают о точках максимума функции. В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус». На отрезке $[-6; 9]$ такая точка всего одна! Это $x = 7$.

А все эти «горки», которые вы, возможно, старались посчитать, — это точки максимума производной, и о них вас спросят не сейчас, а на первом курсе вуза.

Ответ: 1.

2-е место. Снова производная.

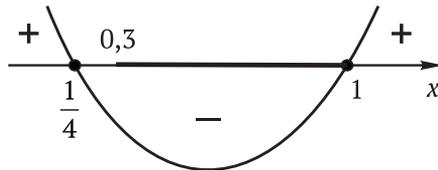
Найдем производную функции $y = 4x^2 - 10x + 2\ln x - 5$ и приравняем ее к нулю.

$$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x}; \quad y' = 0; \quad \frac{8x^2 - 10x + 2}{x} = 0.$$

Корни квадратного уравнения $8x^2 - 10x + 2 = 0$ — это $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1$.

$$y'(x) = 0 \text{ при } x_1 = \frac{1}{4} \text{ и } x_2 = 1.$$

Найдем знаки производной.



Точка $x_2 = 1$ — точка минимума функции $y(x)$. Точка $x_1 = \frac{1}{4}$ не лежит на отрезке $[0,3; 1]$. Поэтому $y(0,3) > y(1)$ и $y(3) > y(1)$. Значит, наименьшее значение функции на отрезке $[0,3; 1]$ достигается при $x = 1$, то есть в правом конце отрезка. Найдем это значение.

$$y_{\min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11.$$

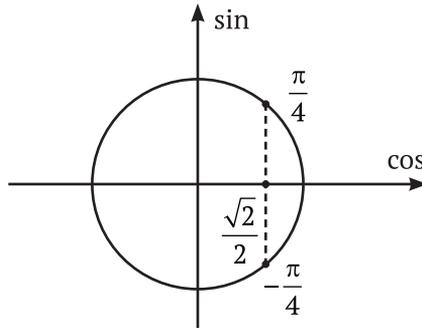
Ответ: -11.

1-е место. Тригонометрическое уравнение: $\cos \frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Типичная ошибка — решать это уравнение в уме. Мы не будем так делать! Несмотря на то, что это задание № 1 из Первой части варианта ЕГЭ, оно является настоящим тригонометрическим уравнением, причем с отбором решений.

Сделаем замену: $\frac{\pi(x+1)}{4} = t$.

Получим: $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Получаем решения:

$$t = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к переменной x .

$$\frac{\pi(x+1)}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поделим обе части уравнения на π и умножим на 4.

$$x + 1 = \pm 1 + 8n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = 8n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = -2 + 8n. \end{cases}$$

Первой серии принадлежат решения $-8; 0; 8\dots$

Вторая серия включает решения $-2; 6; 14\dots$

Наибольший отрицательный корень — тот из отрицательных, который ближе всех к нулю. Это $x = -2$.

Ответ: -2 .

Сколько задач теста вам удалось решить самостоятельно и правильно?

Если все 10 — поздравляем вас! Если меньше — значит, есть над чем работать. Перед вами целый задачник для тренировки. Сначала условия задач по всем темам. А дальше — решения и ответы. Если что-то окажется непонятно — перейдите по QR-коду на странице 4 этой книги. Вы найдете ссылки на необходимую теорию и образцы решения задач.

Глава 2

Простейшие текстовые задачи и тренировка внимательности

Не пропускайте эту главу! Кажется, что задачи элементарные и на ЕГЭ таких простых не будет. Но сколько раз, проводя пробные ЕГЭ и математические тренинги, я видела, как крутые отличники делают ошибки в примитивных задачах. Поэтому внимательно читайте условия, ищите простые способы решения и считайте без калькулятора!

- 2.1. Средняя скорость аквариумной улитки — 50 см/час. Средняя скорость гепарда (во время броска) — 100 км/ч. Во сколько раз гепард быстрее улитки?
- 2.2. Стоимость 1 килограмма тыквы составляет 75 рублей. Готовясь к Хеллоуину, Антон купил тыкву весом 4 кг 400 г. Сколько рублей сдачи он должен получить с 350 рублей?
- 2.3. Самолет вылетает из Магадана в 15.15 и прилетает в Москву в 15.00 того же дня. Найдите среднюю скорость авиаперелета (в км/ч), если разница во времени между Москвой и Магаданом 8 часов, а длина воздушной трассы 6200 км.
- 2.4. Студент Василий раздумывает, что лучше купить: букет и подарок для Маши на День святого Валентина или кошачий корм для Барсика. Букет стоит 750 рублей. Подарок, который понравится Маше, стоит 2320 рублей, пачка кошачьего корма стоит 58 рублей. Какое наибольшее количество пачек корма для Барсика сможет купить Василий, если «случайно забудет» про День святого Валентина?
- 2.5. Собираясь в отпуск в Таиланд, Яна меняет 55 тысяч рублей на доллары по курсу 63 рубля за доллар, чтобы по прилете в Бангкок поменять доллары на тайские баты по курсу 31,5 бата за доллар. Сколько тайских бат получила бы Яна, если бы можно было напрямую конвертировать рубли в баты?
- 2.6. Все учащиеся 11А и 11Б написали сочинение. Среднее арифметическое баллов за сочинение в 11А классе равно 71, а в 11Б классе оно равно 82. Средний балл среди всех учащихся равен 76. Во сколько раз в 11А классе больше учащихся, чем в 11Б?

Округление, размерности, перевод одних величин в другие

- 2.7. Наполеон Бонапарт ростом был невысок — всего 5 футов и 2 дюйма, согласно историческим данным. Выразите рост Наполеона в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.
- 2.8. Девочка Маша уехала учиться в Лондон и через 3 года написала бабушке, что выросла на 1 фут и 3 дюйма. У бабушки нет ни ноутбука, ни калькулятора. Помогите посчитать, на сколько сантиметров выросла внучка! 1 фут равен 12 дюймам, 1 дюйм считаем равным 2,54 см. Ответ округлите до целого числа сантиметров.
- 2.9. За $1\frac{1}{5}$ часа поезд проехал 108 км. Выразите скорость поезда в м/с.

Решения и ответы

- 2.1. Переведем скорость улитки в км/ч.

$$50 \text{ см/ч} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ км/ч} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ км/ч.}$$

Отношение скоростей гепарда и улитки равно

$$10^2 : (5 \cdot 10^{-4}) = 10^6 : 5 = 200\,000.$$

Ответ: 200 000.

- 2.2. Купленная тыква стоит $4,4 \cdot 75 = 330$ рублей. Сдача с 350 рублей составит $350 - 330 = 20$ рублей.

Ответ: 20.

- 2.3. Вылет и прилет всегда указываются по местному времени. Если бы самолет вылетел из Магадана ровно в 15.00 по местному времени, он бы находился в пути 8 часов. Поскольку время вылета 15.15, самолет был в полете 7 часов 45 минут,

то есть $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$ часа.

$$S = v \cdot t; v = \frac{6200 \text{ км}}{\frac{31}{4} \text{ ч}} = \frac{6200 \cdot 4}{31} \text{ км/ч} = 800 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 800.

- 2.4. Празднование Дня Святого Валентина обойдется Василию в $750 + 2320 = 3070$ рублей.

Разделим 3070 на 58 и найдем, сколько пачек кошачьего корма можно купить на эти деньги.

$$\frac{3070}{58} = \frac{1535}{29} = 52\frac{27}{29}.$$

Можно купить 52 пачки корма для Барсика. О дальнейшей судьбе студента Василия вы узнаете из следующих глав книги. А что бы выбрали вы — отношения или корм для котика?

Ответ: 52.

2.5. 1 доллар стоит 63 рубля или 31,5 тайских бата. Значит, за 2 рубля можно получить 1 бат, а за 55 тысяч рублей — 27 500 бат.

Конечно, в реальности Яна не сможет напрямую поменять рубли на баты. При переводе рублей в доллары, а затем долларов в баты будет происходить округление до меньшей величины.

Ответ: 27 500.

2.6. Запишем данные задачи в таблицу.

	Сколько человек в классе	Сколько всего набрали баллов
11 А	x	$71x$
11 Б	y	$82y$
Всего в двух классах	$x + y$	$76(x + y)$

Пусть в 11А классе x учеников, а в 11Б классе y учеников. Тогда учащиеся 11А класса набрали за сочинение $71x$ баллов, а учащиеся 11Б набрали $82y$ баллов. Получим:

$$71x + 82y = 76(x + y),$$

$$71x + 82y = 76x + 76y,$$

$$6y = 5x,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

2.7. Переведем футы и дюймы в сантиметры. Рост Наполеона равен

$$30,5 \cdot 5 + 2,54 \cdot 2 = 157,58 \text{ см} \approx 158 \text{ см}.$$

Какой ответ у вас? Если получилось 6 или 20 сантиметров — вспомните, что Наполеон Бонапарт был выдающимся полководцем, а не хомячком или ежиком!

Ответ: 158.

2.8. Увеличение роста Маши в сантиметрах составит

$$2,54 \cdot (12 + 3) = 2,54 \cdot 15 = 38,1 \text{ см}.$$

Округлив до целых, получим 38.

Ответ: 38.

2.9. $1\frac{1}{5}$ часа = 72 минуты = $72 \cdot 60$ секунд,

$108 \text{ км} = 108 \cdot 10^3 \text{ м}$. Скорость поезда в м/с составляет $\frac{108 \cdot 10^3}{72 \cdot 60} = 25 \text{ м/с}$.

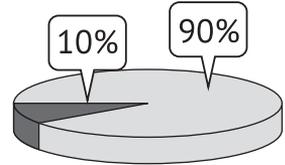
Ответ: 25.

Глава 3

Задачи на проценты

Правила решения задач на проценты

1. Один процент — это одна сотая часть чего-либо.
2. За 100% принимается та величина, с которой сравниваем.



3. Если величину x увеличить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Если величину x уменьшить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

4. Если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right)$.

Если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$.

Изучите таблицу с необходимыми формулами.

Проверьте себя:

Что принимается за 100%?

Как записать, что величина x увеличилась на p процентов или уменьшилась на p процентов?

Что будет, если x дважды увеличить на p %?

Задания на проценты в этой главе — хорошая тренировка перед изучением темы «Задачи с экономическим содержанием на ЕГЭ по математике».

- 3.1. На Пробном ЕГЭ по математике Никита получил некоторое количество баллов. Если его результат увеличить на 80%, получится 90 баллов. На сколько баллов Никита написал Пробный ЕГЭ?
- 3.2. Лечение одного зуба в стоматологии «Скалозуб» стоит 3520 рублей. На лечение второго зуба стоматология дает скидку в 10%, а на лечение третьего зуба — в 40% от первоначальной стоимости. Сколько заплатит Маша за лечение трех зубов сразу, если решится на такой поступок? Ответ выразите в рублях.
- 3.3. Игорь открыл счет в банке и внес на него некоторую сумму в евро. Через год сумма на счете Игоря составляла 1590 евро. Найдите первоначальную сумму вклада, если банк начисляет по валютным вкладам 6% годовых.
- 3.4. Зарботная плата Николая составляет 120 тысяч рублей в месяц, а зарботная плата Андрея — 144 тысячи рублей в месяц. На сколько процентов зарплата Андрея больше зарплаты Николая?
- 3.5. Налог на доходы составляет 13% от зарботной платы. После удержания налога на доходы гражданин Попов получил 191 400 рублей. Сколько рублей составляет зарботная плата гражданина Попова?
- 3.6. Цена ноутбука с учетом скидки в размере 25% составляет 20 400 рублей. Сколько рублей осталось бы от суммы в 30 000 рублей после покупки ноутбука по первоначальной цене?
- 3.7. Марина открывает кондитерскую. По ее расчетам, средний чек (сумма покупки одного клиента) составит 400 рублей. Ежемесячные расходы составят: арендная плата за помещение — 280 тысяч рублей, зарботная плата сотрудников — 112 тысяч рублей, переменные затраты (продукты, реклама и прочее) — 414 тысяч рублей. Ставка налога — 6% от выручки. Считаем, что в месяце 30 дней. Какое наименьшее количество клиентов должно в среднем ежедневно проходить через кондитерскую, чтобы чистая прибыль Марины была не менее 40 тысяч рублей в месяц?
- 3.8. В январе 2020 года пенсия Валентины Петровны увеличилась на 5% по сравнению с январем 2019 года. Стоимость пачки макарон увеличилась на 20% по сравнению с январем 2019 года. Масса пачки макарон, продаваемой в магазине, в течение 2019 года уменьшилась от 500 до 400 граммов. На сколько процентов меньше макарон сможет купить Валентина Петровна в январе 2020 года по сравнению с январем 2019 года, если потратит на их покупку всю свою пенсию?
- 3.9. В марте дизайнер Андрей поднял цену на свои услуги на 80% по сравнению с январем, а в октябре — еще на 25% по сравнению с мартом. На сколько процентов больше стали стоить услуги дизайнера Андрея в октябре по сравнению с январем?
- 3.10. В результате строительства новой автострады количество деревьев в городском районе ежегодно сокращалось на p процентов в течение двух лет. Оказалось, что для возвращения к первоначальному уровню количество деревьев необходимо увеличить на 56,25%. Найдите p .

- 3.11.** Программист Егор получает 96 000 рублей в месяц. Егор решил ежемесячно откладывать 25% заработной платы на покупку квартиры, стоимость которой составляет 3 600 000 рублей. Какое наименьшее целое количество лет было бы необходимо для покупки квартиры, если бы зарплата Егора и стоимость квартиры оставались постоянными?
- 3.12.** Десять одинаковых пирожных дороже большого торта на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же пирожных дороже торта?
- 3.13.** Когда в ноябре 2020 года курс доллара стал равен 77,5 рублей, Валентина Петровна решила потратить S тысяч рублей на покупку долларов. На сколько процентов больше получилась бы сумма в долларах, если бы Валентина Петровна сделала это в январе 2020 года, когда курс доллара составлял 62 рубля?

Решения и ответы

3.1. Пусть количество баллов, полученное Никитой на Пробном ЕГЭ, равно x . Увеличив x на 80%, получим:

$$\begin{aligned}x + 0,8x &= 1,8x, \\ 1,8x &= 90,\end{aligned}$$

отсюда $x = 50$ баллов — первоначальный результат Никиты.

Ответ: 50.

3.2. За лечение первого зуба Маша заплатит 3520 рублей, за лечение второго 3520 · 0,9 рублей, за третий 3520 · 0,6 рублей.

Общая стоимость лечения зубов составит 3520 · 2,5 = 8800 рублей.

Ответ: 8800.

3.3. За год сумма на счете Игоря увеличилась на 6%, то есть в 1,06 раза. Если первоначальная сумма равна S , то $1,06S = 1950$, и $S = 1950 : 1,06 = 1500$ евро.

Ответ: 1500.

3.4. За 100% принимаем величину, с которой сравниваем. В этой задаче за 100% принимается зарплата Николая (сравниваем с ней). Тогда зарплата Андрея равна $120 + 24 = 120 + \frac{120}{5} = 120 + \frac{20}{100} \cdot 120$. К 120 тысячам рублей прибавили 20% от 120 тысяч рублей. Значит, зарплата Андрея на 20% больше зарплаты Николая.

Ответ: 20.

3.5. Гражданин Попов получил 191 400 рублей после удержания налога, и это составляет $100 - 13 = 87\%$ его заработной платы.

Заработная плата гражданина Попова равна $191\,400 : 0,87 = 220\,000$ рублей.

Ответ: 220 000.

3.6. Поскольку 20 400 рублей составляют 75% от первоначальной стоимости ноутбука, то есть $\frac{3}{4}$ его первоначальной стоимости, получим, что без скидки ноутбук стоил $20\,400 : \frac{3}{4} = 27\,200$ рублей, $30\,000 - 27\,200 = 2800$ рублей.

Ответ: 2800.

3.7. Пусть в день в кондитерскую приходит x покупателей, выручка за день равна $400x$.

За 30 дней: $30 \cdot 400x$.

После уплаты 6% налога остается $0,94 \cdot 30 \cdot 400x = 376 \cdot 30x$.

Расходы за месяц составляют: $280 + 112 + 414 = 806$ тысяч рублей,

Прибыль равна разнице между выручкой и расходами,

$$376 \cdot 30x - 806\,000 = 40\,000,$$

$$376 \cdot 30x = 846\,000,$$

$$x = 75.$$

Ответ: 75.

3.8. Составим таблицу.

Год	Размер пенсии	Стоимость пачки макарон	Масса макарон в пачке	Сколько килограммов макарон можно купить на пенсию
2019	P	S	0,5 кг	$\frac{P}{S} \cdot 0,5 = m_1$
2020	$P \cdot 1,05$	$1,2S$	0,4 кг	$\frac{P \cdot 1,05}{1,2S} \cdot 0,4 = m_2$

Найдем, на сколько процентов меньше макарон сможет купить на свою пенсию Валентина Петровна в 2020 году.

$$m_2 = \left(1 - \frac{q}{100}\right) m_1,$$

$$\frac{0,4 \cdot 1,05}{1,2} \cdot \frac{P}{S} = \left(1 - \frac{q}{100}\right) \cdot \frac{P \cdot 0,5}{S},$$

$$\frac{4 \cdot 105}{120} = \left(1 - \frac{q}{100}\right) \cdot 5,$$

$$1 - \frac{q}{100} = \frac{4}{5} \cdot \frac{105}{120} = \frac{7}{10},$$

$$1 - \frac{q}{100} = \frac{70}{100}, \quad q = 30.$$

Ответ: 30.

3.9. За 100% принимаем величину, с которой сравниваем, а именно стоимость услуг Андрея в январе.

Пусть стоимость услуг дизайнера Андрея в январе равна x рублей.

Если величину x увеличить на $p\%$, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Значит, в марте цена услуг Андрея станет равна $x \cdot 1,8$ рублей, а в октябре $x \cdot 1,8 \cdot 1,25 = x \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{9}{4}x = 2,25x$. Это на 125% больше первоначальной цены x .

Ответ: 125.

3.10. Пусть первоначально деревьев было x . Тогда после уменьшения количества деревьев на $p\%$ в первый год их станет $\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot x$, а в конце второго года $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot x$.

Для возвращения к первоначальному количеству деревьев необходимо $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot x$ увеличить на 56,25%.

Получим:

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{56,25}{100}\right) = x,$$

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \frac{15\,625}{10\,000} = 1,$$

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{10\,000}{15\,625}.$$

Так как $1 - \frac{p}{100} > 0$, а $15625 = 125^2$,

$$1 - \frac{p}{100} = \frac{100}{125},$$

$$\frac{p}{100} = \frac{25}{125},$$

$$p = 20.$$

Ответ: 20.

3.11. Будем вести расчеты в тысячах рублей.

1) $96 \cdot 0,25 = 96 \cdot \frac{1}{4} = 24$ тысячи рублей откладывает Егор в месяц.

2) $24 \cdot 12 = 288$ тысяч рублей — Егор откладывает за год.

3) $3600 : 288 = 900 : 72 = 100 : 8 = 12,5$ лет потребуется Егору.

За 12 лет Егор еще не накопит на квартиру, а за 13 — накопит.

Ответ: 13.

3.12. Пусть x — стоимость пирожного, y — стоимость торта, которую принимаем за 100%.

Стоимость 10 пирожных составляет 104% от стоимости торта.

Составим уравнение:

$$10x = 1,04y.$$

$$\text{Отсюда } 5x = 0,52y,$$

$$15x = 1,56y.$$

Стоимость 15 пирожных составляет 156% от цены торта. Значит, 15 пирожных на $156 - 100 = 56\%$ дороже торта.

Ответ: 56.

3.13. По условию задачи, в ноябре 2020 года Валентина Петровна поменяла S тысяч рублей на доллары и получила $\frac{S}{77,5}$ долларов.

Если бы она в январе 2020 года поменяла такую же сумму на доллары, она бы получила $\frac{S}{62}$ долларов.

За 100% принимаем величину, с которой сравниваем, то есть сумму в долларах, полученную в ноябре. Сумма в долларах, которую Валентина Петровна получила бы в январе, была бы на $p\%$ больше.

$$\frac{S}{77,5} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{S}{62}.$$

Поделим обе части на S .

$$\frac{1}{77,5} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{1}{62},$$

$$62 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 77,5,$$

$$\frac{62p}{100} = 15,5,$$

$$p = \frac{1550}{62} = 25\%.$$

Ответ: 25.

Глава 4

Текстовые задачи: движение и работа, растворы и смеси

Проверьте себя. Хорошо ли вы помните правила решения задач на движение и работу?

Начиная решать такую задачу, составьте таблицу и запишите в нее исходные данные. Если непонятно, с чего начать, — сделайте рисунок.

Если у вас получилось дробно-рациональное уравнение (с переменной в знаменателе) — вы можете решать его обычным путем, приводя к квадратному. А можно сделать быстрее и проще — попробовать подобрать целый положительный корень.

Необходимая теория, лайфхаки и примеры решения задач – по QR-коду на странице 4 этой книги.

Задачи на движение

Правила решения задач на движение

1. Основная формула: $S = v \cdot t$
(Расстояние = Скорость · Время)

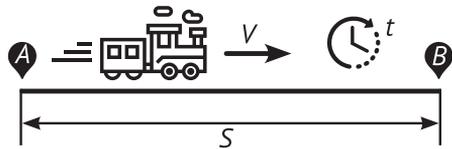
2. В качестве переменной лучше всего выбрать скорость.

3. Составляем таблицу: скорость, время, расстояние. Записываем в таблицу все известные величины.

4. Составляем уравнение.

5. Решаем уравнение. Или сразу подбираем целый положительный корень.

6. Средняя скорость находится по формуле $V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2}}$.





Учебное издание

EAES

Малкова Анна Георгиевна

МАТЕМАТИКА. УМНЫЙ СБОРНИК ЗАДАЧ

Ответственный редактор *А. Васько*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*

Формат 70x100^{1/16}. Бумага офсетная.
Тираж 4000 экз.

Импортер на территории ЕАЭС: ООО «Феникс».
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, д. 150
Тел/факс: (863) 261-89-65, 261-89-50

Изготовлено в Турции. Дата изготовления: 08.2022. Срок годности не ограничен.

Изготовитель: «Билнет Матбаацилик Ве Яиницилик А.С.»
(BILNET MATBAACILIK VE YAYINCILIK A.Ş)
Адрес: Дудулла Орг. Сан. Болг. 1 кад: 16,
Есенкент Умранье, Стамбул, Турция, 34776
(Adres: Dudullu Org. San. Bölğ. 1 cad: 16,
Esenkent Ümraniye, Стамбул, Турция, 34776)
по заказу и под контролем ООО «Феникс»