Большая перемена

Э.Н. Балаян

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ

Издание шестое

Ростов-на-Дону
Феникс
2022

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Справочник по математике для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Э.Н. Балаян. — Изд. 6-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2022. — 186, [1] с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-38213-4

Справочник предназначен для выпускников средних образовательных заведений: школ, гимназий, лицеев, училищ или техникумов и абитуриентов высших учебных заведений при подготовке и сдаче выпускных и вступительных экзаменов.

ISBN 978-5-222-38213-4

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Часть 1
Алгебра и начала анализа

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -\dfrac{b}{a}$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное

решение (прямые пересекаются в одной точке);

2) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то

система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны);

3) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то

система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то

$$x = -\frac{b}{2a}$$ — один корень.

3) Если $D < 0$, корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$,

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$, если коэффициенты a и c имеют разные знаки; если коэффициенты a и c имеют

одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

3) Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}\ .$$

4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \ \ x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного вида: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Виета для кубического уравнения

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, то

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$;

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b$;

$x_1\,x_2\,x_3 = -c$.

5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c =$

$= a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$,

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

6. Биквадратное уравнение

Общий вид:
$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному вида $ay^2 + by + c = 0$.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}\ ,$$

где $D = b^2 - 4ac$.

7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$$

и заменой $y = x + \frac{m}{x}$ и $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $(m = 1)$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $(m = -1)$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

8. Свойства степеней

Для любых x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

$a^x : a^y = a^{x-y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab\ ;$$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ ;$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}\ ;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}\ ;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ ;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\ , \text{ если } 0 \leq a < b;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \geq 0).$$

11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

12. Формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+$
$+\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$
$-\sin\alpha\sin\beta;$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta -$
$- \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta +$
$+ \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Дополнительные формулы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta};$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \sin\alpha \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

14. Формулы половинного аргумента (для функции sin и cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\,.$$

15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\;;$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\;;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \; ;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \; .$$

16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \; ;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \;;$$

$$\sin\alpha - \sin\beta =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \;;$$

$$\cos\alpha - \cos\beta =$$

$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \;;$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \;;$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ;$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)\ ,$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Дополнительные формулы:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\ ;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\,\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

Содержание

Учебное издание

Э.Н. Балаян

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ

Ответственный редактор *С. Осташов*

Формат 60 х 84 1/128. Бумага офсетная.
Тираж 10 000 экз.

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 07.2022.
Срок годности не ограничен

Отпечатано в ООО «Принт-М»
142300, Россия, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов 1 /
Корпус Производственный Б, помещение 279, этаж 4.