

ЕГЭ СЕКРЕТНЫЕ
ПРИЁМЫ
РЕПЕТИТОРА

Анна Малкова

МАТЕМА- ТИКА

Издание 4-е

Ростов-на-Дону

 **Е Н И К С**

2024

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я7

КТК 444

М19

Малкова А. Г.

М19 Математика / Анна Малкова. — Изд. 4-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 474, [1] с. : ил. — (ЕГЭ. Секретные приемы репетитора).

ISBN 978-5-222-41588-7

В этой книге — секреты и приемы, благодаря которым вы поймете математику. Учителю они помогут сделать урок интересным. Репетитору — объяснить тему так, что любому будет понятно. Старшекласснику — получить ответы на непростые вопросы и отлично подготовиться к ЕГЭ.

Приемы быстрого счета. Шпионские методы запоминания формул. Полный справочник для подготовки к ЕГЭ. Все формулы! Секреты решения типовых заданий. И нетиповых — тоже. Занимательные задачи и парадоксы. Авторская методика. Объяснение самых сложных тем — простыми словами. И многое другое!

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я7

ISBN 978-5-222-41588-7

© Малкова А.Г., 2020

© Оформление: ООО «Феникс», 2020

© В оформлении обложки использованы

иллюстрации по лицензии Shutterstock.com

ОТ АВТОРА

Для тех, кто хочет не зубрить, а понимать.

Кто задает вопросы: «Почему?» и «Зачем?»

И особенно для тех, кто готовится к ЕГЭ самостоятельно.

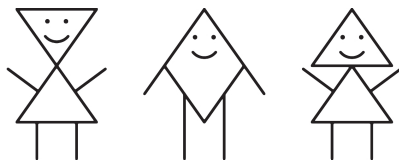
Для тех, кто перестал понимать математику или никогда ее не понимал.

Для самых умных учителей. Для преподавателей курсов подготовки к ЕГЭ и математических кружков.

Для учащихся десятого и одиннадцатого класса.

И конечно, для всех, кто сдает ЕГЭ на максимальный балл!

Пришли три выпускника сдавать ЕГЭ.



И получил один 30 баллов, другой 60, третий 90. Кто же из них на сколько баллов сдал?

Мой ответ — на следующей странице.

В этой книге — множество секретных приемов, благодаря которым вы поймете математику. Учителю они помогут сделать урок интересным. Репетитору — объяснить тему так, что любому будет понятно. Старшекласснику — получить ответы на непростые вопросы и отлично подготовиться к ЕГЭ.

Хорошо, если вы занимаетесь с репетитором-профессионалом, который обо всем расскажет. А если нет? А кто расскажет, если вы сами репетитор?

Мы будем решать задачи простыми способами. А иногда сразу, прочитав условие, будем записывать ответ.

В этой книге вы найдете:

— приемы быстрого счета;

— шпионские методы запоминания формул;

— полный справочник для подготовки к ЕГЭ. Все формулы!

— секреты решения типовых заданий. И нетиповых — тоже;

— вы научитесь решать задачи второй части ЕГЭ. Даже если они у вас никогда не получались;

— узнаете о типичных ловушках в вариантах ЕГЭ и научитесь их замечать;

— и еще — занимательные задачи и парадоксы. Они помогают развить математическое мышление;

— и объяснение самых сложных тем — простыми словами;

— а для репетиторов и учителей — авторская методика и полезные педагогические приемы.

МАТЕМАТИКА

Здесь нет случайных задач. Каждая — ключ к определенному правилу. Иллюстрация какого-либо секрета. Среди них много моих авторских. Они помечены буквой (А).



Почти в каждой главе есть **«конфетка»** — нестандартная и особенно интересная задача. Иногда — повышенного уровня сложности или задача на смекалку. Иногда — просто красивая. Не пропускайте их! Старайтесь решить или хотя бы разобрать решения.

В конце каждой главы — задачи ЕГЭ для самостоятельной работы. Ответы, указания и решения — в конце книги.

Это моя третья книга по математике. Все они дополняют друг друга. Задачи в них не повторяются.

Первая — это «Математика. Авторский курс подготовки к ЕГЭ». Подготовка к ЕГЭ с нуля до высоких баллов. Вся необходимая теория и примеры решения задач.

Вторая — «ЕГЭ. Математика. Задания высокой и повышенной сложности». Книга посвящена второй части ЕГЭ по математике профильного уровня. Это книга-путеводитель от школьной «четверки» к 100 баллам.

Вернемся к нашим абитуриентам с картинки.

Первый получил 90 баллов. Потому что умный и усидчивый.

Второй — ни ума, ни усидчивости — получил 30.

А третий всего 60. Сами понимаете, почему...

Это шутка. Но чтобы сдать ЕГЭ на высокие баллы, мало быть усердным и старательным. Надо знать хитрости и секреты. Уметь думать, а не просто действовать по шаблону!

«Машины должны работать. Люди должны думать».

Девиз компании IBM.

ГЛАВА 1

Два лайфхака и плюс 20 баллов на ЕГЭ

Модное слово «лайфхак» дословно означает «взлом жизни». На самом деле не жизни (ее не сломаешь), а шаблона. Лайфхак — это нетривиальный полезный совет, хитрый трюк, который работает там, где не помогают очевидные способы.

Первый лайфхак: как увеличить результат ЕГЭ на 20 баллов, заплатив всего 200 рублей. Хотите узнать?

Прямо сейчас приобретите:

— Тетрадь в клетку, 96 листов, формат А4.

— Линейку.

— Черную ручку. Таковую, какой будете писать на ЕГЭ.

Тетрадь, ручку, линейку выберите те, что вам нравятся. Это важно.

Тетрадь — для того, чтобы записывать **все** решения задач. Обходимся без черновиков! Не совсем, конечно, но черновиков — минимум. Не получилось — зачеркнули, сделали заново. Пишем так, чтобы перед экзаменом посмотреть и вспомнить все.

Если задача большая, начинаем ее решение с новой страницы. Больше всего ошибок вы делаете, когда переворачиваете страницу и пишете на следующей.

Линейка — чтобы рисовать чертежи. Даже простые чертежи рисуем не по пальцу и не на глаз, а по линейке. В геометрии и стереометрии чертеж — это половина решения.

А черная ручка — чтобы текст был разборчивым. Чертежи в задачах рисуем не карандашом (тупым и плохо заметным), а ручкой.

Если ручка плохо пишет, выкиньте ее и замените на хорошую.

Второй лайфхак: как распределить время на экзамене, чтобы все успеть и получить высокий балл?

Первые 12 из 19 заданий ЕГЭ — с кратким ответом. Учимся решать их быстро — все 12 задач за 25–30 минут!

Самое главное. Решаем задачи по одной. Не пропуская, не хватаясь за 2 (3, 10...) задач сразу. Решили — проверили — записали ответ. Только после этого — следующая!

Видели, как белка грызет орешки? Один за другим она точит их своими острыми зубками! Разгрызла. Съела. Следующий! Разгрызла. Съела. Следующий. Один за другим! Если белке попался орех, который она не может разгрызть, она не расстраивается!

МАТЕМАТИКА

Вот так и вы на ЕГЭ одно за другим разгрызаете задания. Конечно, для этого нужна постоянная тренировка. Потому что, если белочка не справится с одним, другим, третьим орехом, она останется голодной!

Минимум черновиков. Учимся сразу делать хорошо!

И еще час — на задачи 13 (уравнение), 15 (неравенство) и 17 (экономическую). Решаем задачи по одной! Не хватаемся за все сразу. Умная белочка не станет запихивать в себя три ореха одновременно!

Если вы намерены сдать ЕГЭ на максимальный балл, вам надо за первые полтора часа экзамена решить 15 задач и набрать около 75 баллов. И тогда остается время на творческую работу — задачи по стереометрии, геометрии, параметры, числа и их свойства.

ГЛАВА 2

Решаем без уравнений!

Начнем с небольшого теста.

Не спешите записывать уравнения — они здесь не нужны. Только картинки, простые таблицы, минимум вычислений. Понимание вместо зубрежки! И тренировка внимания.

Возможно, вы отличник. Вы посмотрите и скажете: «Это же тривиально! Дайте мне скорее параметров, и «экономических», и еще на числа и их свойства!» — Не торопитесь. Здесь собраны простые задачи, которые не всегда получаются даже у отличников.

1. Который сейчас час, если оставшаяся часть суток в 2 раза больше прошедшей?
2. За книгу заплатили 1 рубль и еще половину стоимости книги. Сколько стоит книга?
3. Третий кирпича на полкилограмма легче, чем полкирпича. Сколько весит кирпич?
4. По кольцевой линии метро ходят 9 поездов с интервалом 4 минуты. С каким интервалом будут ходить по ней 12 поездов?
5. Шесть кошек ловят шесть мышек за шесть минут. Сколько кошек поймают сто мышек за пятьдесят минут?
6. Лев съедает козу за 2 часа, волк — за 3 часа, а лиса — за 6 часов. За сколько часов лев, волк и лиса втроем съедят козу?
7. Сколько времени будет проходить поезд длиной 500 м через туннель, длина которого 500 м, если скорость поезда 60 км/ч?
8. В полдень из Москвы в Тулу выходит автобус с пассажирами. Часом позже из Тулы в Москву выезжает велосипедист и едет по тому же шоссе, но, конечно, значительно медленнее, чем автобус. Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, то кто из них будет дальше от Москвы?
9. (А) Самолет вылетает из Магадана в 15.15 и прилетает в Москву в 15.00 того же дня. Найдите среднюю скорость авиaperелета (в км/ч), если разница во времени между Москвой и Магаданом 8 часов, а длина воздушной трассы 6200 км.
10. Алеша заплатил в столовой за три порции пельменей, а Боря — за две таких же порции, и втроем с Васей они их поровну съели. Вася оказался должен товарищам 50 рублей. Сколько он должен каждому?
11. Половину пути лошадь бежала со скоростью 12 км/ч. Остальной путь она шла со скоростью 4 км/ч. Какова ее средняя скорость?
12. В овощной магазин привезли 100 кг огурцов, содержание воды в которых составляло 99%. Через 3 дня хранения содержание воды в огурцах сократилось до 98%. Сколько теперь весят огурцы?

МАТЕМАТИКА

13. Владелец катера узнал о трех изобретениях: одно из них экономит 30% топлива, второе — 45%, третье — 25%. Он решил применить все три изобретения сразу, полагая экономить $30 + 45 + 25 = 100\%$ топлива. Почему это невозможно? Сколько процентов экономии он получит?

14. В два стакана налиты поровну кофе и молоко. Из стакана с кофе берем одну столовую ложку, переливаем в стакан с молоком, размешиваем. Из получившейся смеси берем одну столовую ложку, выливаем обратно в кофе. Чего больше — кофе в молоке или молока в кофе?

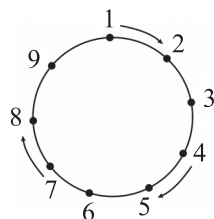
И проверим, что у вас получилось.

1. 8 часов утра. В сутках 24 часа. Прошла треть суток, то есть 8 часов.

2. 2 рубля. По условию, 1 рубль — это половина стоимости книги, значит, 2 рубля — вся ее стоимость.

3. 3 кг. Поскольку $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, получим, что $\frac{1}{6}$ кирпича весит полкилограмма. Значит, весь кирпич — в 6 раз больше, то есть 3 килограмма.

4. 3 минуты. Нарисуем кольцевую линию метро и отметим на ней точками 9 поездов на равных расстояниях друг от друга. Пусть это будут первый, второй, третий поезд — до девятого.



Очевидно, поезд метро проезжает всю кольцевую линию за $36 = 9 \cdot 4$ минут. А 12 поездов будут ходить по кольцевой с интервалом $36 : 12 = 3$ минуты.

5. 12 кошек. Классическая задача на работу. Мы помним, что $A = p \cdot t$, где A — работа, t — время, p — производительность.

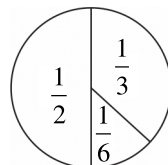
Заметим, что кошки ловят мышек, а не наоборот. За 6 минут «бригада» из 6 кошек поймает 6 мышек. Производительность этой кошачьей «бригады» — 1 мышь в минуту. Для поимки 100 мышей «бригаде» из 6 кошек понадобится в 100 раз больше времени (100 минут). Если кошек будет 12, они поймут 100 мышей за 50 минут.

6. 1 час.

Еще одна классическая задача на работу. Лев за час съедает

$\frac{1}{2}$ козы, волк $\frac{1}{3}$ козы, а лиса $\frac{1}{6}$ козы. При совместной работе производительности участников складываются, и трое хищников за 1 час

съедят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ козу.



7. 1 минуту.

Что значит «поезд прошел через туннель»? Вот в туннель въехал его первый вагон, за ним следующие. А вот из туннеля показался хвост



ГЛАВА 2. Решаем без уравнений!

последнего вагона. Таким образом, голова поезда пройдет путь, равный сумме длин поезда и туннеля, то есть 1 километр. При скорости $60 \text{ км/ч} = 1 \text{ км/минуту}$ поезд пройдет это расстояние за минуту.

8. Одинаково. Это шутка. Внимательно прочитайте условие задачи.

9. 800.

Я придумала эту задачу во время полета из Магадана в Москву. Вылет и прилет всегда указываются по местному времени. Если бы самолет вылетел из Магадана ровно в 15.00 по местному времени, он бы находился в пути 8 часов. Поскольку время вылета 15.15, самолет был в полете 7 часов 45 минут, то есть $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$ часа.

$$S = v \cdot t; v = \frac{6200 \text{ км/ч}}{\frac{31}{4} \text{ часа}} = \frac{6200 \cdot 4}{31} = 800 \text{ км/ч.}$$

10. Алеше — 40 рублей, Боре — 10 рублей.

Всего Алеша, Боря и Вася съели 5 порций пельменей, значит, каждый из них съел по $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$ порции, и Вася тоже съел $\frac{5}{3}$ порции. Васыны $\frac{5}{3}$ порции стоят 50 рублей, значит, $\frac{1}{3}$ порции стоит 10 рублей, а вся порция пельменей — 30 рублей. Алеша заплатил за 3 порции 90 рублей: 50 за себя и 40 за Васю. Боря заплатил 60 рублей: на 50 рублей съел сам, а 10 рублей заплачены за Васю.

11. 6 км/ч.

Средняя скорость — это вовсе не среднее арифметическое скоростей. По определению,

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2}}.$$

Примем $S_1 = S_2$ за единицу и найдем $v_{\text{ср}} = \frac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = 6 \text{ км/ч.}$

12. 50 кг.

Если первоначально в огурцах было 99% воды, то 1% в них — «сухое вещество» и в 100 кг огурцов — 1 кг «сухого вещества». После того как часть воды из огурцов испарилась, «сухого вещества» стало 2% от новой массы огурцов, а количество его так и осталось равным 1 кг. Следовательно, масса огурцов стала равна 50 кг.

Вместо 100 кг свежих огурцов получилось 50 кг вялых и засохших. А содержание воды в них изменилось всего на 1%.

13. 71,125% топлива можно сэкономить.

100% экономии владелец, конечно, не получит — иначе его катер вообще не расходовал бы топлива.

Запомним важное правило: **за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.**

МАТЕМАТИКА

Пусть x — первоначальный расход топлива.

После применения первого изобретения величина x уменьшится на 30%. Расход топлива

станет равен $x \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 0,7x$.

Если расход топлива уменьшить еще на 45%, он станет равен $0,7x \cdot (1 - 0,45) = 0,7 \cdot 0,55x = 0,385x$.

Еще на 25% уменьшим расход топлива. Получим $0,385x \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0,28875x = 28,875\%x$.

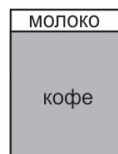
Значит, сэкономить можно $100 - 28,875 = 71,125\%$ топлива.

14. Поровну.

Классическая задача. Нарисуем стаканы после переливания так, как мы рисуем в задачах растворы: как будто кофе и молоко в них разделены.

После переливаний уровень жидкостей в стаканах такой же, каким и был вначале.

В первом стакане кофе и немного молока. А где же тот кофе, место которого сейчас занимает молоко? Конечно, он во втором стакане! Содержание кофе в молоке и молока в кофе теперь одинаково.



Сколько задач вы решили самостоятельно и без подсказок?



Вот известная задача с просторов интернета. Она иногда появляется на форумах людей, далеких от математики, и неизменно вызывает споры, перерастающие в беспощадный холивар.

Вас приглашают на работу финансовым аналитиком в крупную компанию. Обещают начальную зарплату 100 000 долларов в год и два варианта ее повышения:

1. Раз в год вам увеличивают зарплату на 15 000 долларов.
2. Раз в полгода — на 5 000 долларов.

У вас есть 30 секунд на принятие решения.

Какой вариант вам кажется выгоднее и почему?

Вы согласились на первый вариант? Не продешевите, господа аналитики!

Первый вариант. Зарплата за первый год равна 100 тысяч долларов.

Второй вариант. Зарплата за первые полгода 50 тысяч долларов, а за следующие полгода 55 тысяч долларов, всего 105 тысяч долларов. Кто говорил, что первый вариант выгоднее?

Второй год:

Первый вариант: 115 тысяч долларов в год.

Второй вариант: 60 тысяч за первые полгода и 65 тысяч за вторые, всего 125 тысяч долларов.

ГЛАВА 2. Решаем без уравнений!

Третий год:

130 тысяч долларов и $70 + 75 = 145$ тысяч долларов.

Очевидно, выгоднее второй вариант. Каким бы парадоксальным на первый взгляд это ни казалось.

Я неравнодушна к таким задачам и собираю их по разным книгам и сайтам. Авторство можно установить не всегда, и я благодарна всем, чьи задачи использую в своей работе.

Задачи ЕГЭ для самостоятельного решения

1. (А) Наполеон Бонапарт ростом был невысок — всего 5 футов и 2 дюйма, согласно историческим данным. Выразите рост Наполеона в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. (А) Собираясь в отпуск в Таиланд, Яна меняет 55 тысяч рублей на доллары по курсу 63 рубля за доллар, чтобы по прилете в Бангкок поменять доллары на тайские *баты* по курсу 31,5 бата за доллар. Сколько тайских *батов* получит Яна?

3. Бегун пробежал 50 м за 5 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

4. Среди 85 000 жителей города 40% не интересуются футболом. Среди жителей, интересующихся футболом, 90% смотрели по телевизору финал чемпионата мира. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?

5. Цена на электрический чайник была повышена на 22% и составила 2196 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Оглавление

ГЛАВА 1. Два лайфхака и плюс 20 баллов на ЕГЭ	5
ГЛАВА 2. Решаем без уравнений!	7
ГЛАВА 3. Задачи на движение и как их решать в 10 раз проще	12
ГЛАВА 4. Задачи на работу	26
ГЛАВА 5. Задачи на проценты	32
ГЛАВА 6. Арифметическая и геометрическая прогрессии	42
ГЛАВА 7. Задачи на растворы, сплавы и смеси	48
ГЛАВА 8. Теория вероятностей. Схемы, секреты, парадоксы	56
ГЛАВА 9. Приемы и лайфхаки для быстрого счета	69
ГЛАВА 10. Геометрия: занимательные задачи	73
ГЛАВА 11. Пять лайфхаков для решения задач по геометрии	76
ГЛАВА 12. Шпионские приемы запоминания формул	84
ГЛАВА 13. ЕГЭ-справочник по планиметрии	87
ГЛАВА 14. Планиметрия. Задачи ЕГЭ. Часть 1	100
ГЛАВА 15. Геометрические парадоксы	111
ГЛАВА 16. Стереометрия. Два лайфхака для решения задач	115
ГЛАВА 17. Формулы стереометрии и их применение в задачах	122
ГЛАВА 18. Алгебраические уравнения и системы уравнений	129
ГЛАВА 19. Метод интервалов и быстрый способ решения неравенств	143
ГЛАВА 20. Квадратный корень. Типичные ошибки и как их избежать	153
ГЛАВА 21. Модуль числа	163
ГЛАВА 22. Действия со степенями	170
ГЛАВА 23. Логарифмы	175
ГЛАВА 24. Тригонометрия: понимание вместо зубрежки	180
ГЛАВА 25. Тригонометрические уравнения	194
ГЛАВА 26. Задача, с которой не справился интернет	215
ГЛАВА 27. Функции и графики	217
ГЛАВА 28. Пять типов элементарных функций	225
ГЛАВА 29. Показательные и логарифмические уравнения	232
ГЛАВА 30. Показательные и логарифмические неравенства	242
ГЛАВА 31. Задачи ЕГЭ с прикладным содержанием	255
ГЛАВА 32. Преобразование графиков функций	263
ГЛАВА 33. Производная как скорость изменения функции	280
ГЛАВА 34. Задачи на кредиты и вклады	298

Содержание

ГЛАВА 35. «Экономические» задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций	317
ГЛАВА 36. Планиметрия. Учимся решать задачи второй части ЕГЭ	326
ГЛАВА 37. Третье измерение. Стереометрия	366
ГЛАВА 38. Задачи на числа и их свойства — первое знакомство	389
ГЛАВА 39. Варианты ЕГЭ для самостоятельного решения	406
Ответы, указания, решения	416
Дополнительный справочный материал	471
Список литературы	473

Учебное издание



Анна Георгиевна Малкова

МАТЕМАТИКА

Ответственный редактор *А. Васько*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*

Формат 70x100¹/₁₆. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издатель и изготовитель: ООО «Феникс».
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, д. 150
Тел/факс: (863) 261-89-65, 261-89-50

Изготовлено в России. Дата изготовления: 11.2023. Срок годности не ограничен.

Отпечатано в АО «ТАТМЕДИА»

Филиал «Полиграфическо-издательский комплекс "Идел-Пресс"».
Юр. адрес: 420097, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Академическая, д. 2
Факт. адрес: 420066, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Декабристов, здание 2